§6·1 परिचय (Introduction) [Bikaner 11, 13]

अवकल समीकरण का निम्न मानक रूप (standard form)

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P\frac{dy}{dx} + Qy = R \quad \ldots(1)$$

जहाँ P, Q और R केवल x के फलन (विशेष स्थिति में अचर) हैं, **द्वितीय कोटि का रैखिक अवकल समीकरण** (Liner Differential Equation of Second Order) कहलाता है। इस प्रकार के समीकरणों को हल करने की कोई व्यापक विधि नहीं है। इनको हल करने की कुछ विधियाँ अध्याय 3 व 4 में दी गई हैं। जब समीकरण (1) उन अध्यायों में दी गई विधियों से हल नहीं किए जा सकें तो हम इस अध्याय में दी गई विधियों को प्रयोग में लेते हैं। **[Bikaner 06, 10, 12, 13; Ajmer 09]**

§6·2 रैखिक अवकल समीकरण का पूर्ण हल ज्ञात करना जबकि पूरक-फलन में विद्यमान एक समाकल ज्ञात हो (To find Complete Solution of the linear differential equation when one Integral of the complementary function is known)

यदि समीकरण (1) के पूरक फलन में विद्यमान एक समाकल ज्ञात हो या निरीक्षण द्वारा (By Inspection) या और किसी विधि से ज्ञात किया जा सके तो इस समीकरण को प्रथम कोटि (First order) के समीकरण में परिवर्तित कर इसका सम्पूर्ण हल निम्न प्रकार से प्राप्त किया जा सकता है।

मानलो $y = u$ समीकरण (1) के पूरक-फलन (C.F.) का एक ज्ञात भाग है, अर्थात यदि (1) का दायां पक्ष शून्य लिया जाए तो $y = u$ इसका एक हल होगा, तब

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P\frac{dy}{dx} + Qy = 0$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} + P\frac{du}{dx} + Qu = 0 \qquad \ldots(2)$$

मानाकि $y = uv$ समीकरण (1) का पूर्ण हल है, तब

$$\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

तथा $$\frac{d^2y}{dx^2} = u\frac{d^2v}{dx^2} + 2\frac{dv}{dx}\cdot\frac{du}{dx} + v\frac{d^2u}{dx^2}$$

अब y, $\frac{dy}{dx}$ तथा $\frac{d^2y}{dx^2}$ का मान समीकरण (1) में रखने पर

$$\left(u\frac{d^2v}{dx^2} + 2\frac{dv}{dx}\cdot\frac{du}{dx} + v\frac{d^2u}{dx^2}\right) + P\left(u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}\right) + Q(uv) = R$$

या $$u\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{dv}{dx}\left(2\frac{du}{dx} + Pu\right) + v\left(\frac{d^2u}{dx^2} + P\frac{du}{dx} + Qu\right) = R \qquad \ldots(3)$$

अब (3) में (2) का प्रयोग करने पर

$$u\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{dv}{dx}\left(2\frac{du}{dx} + Pu\right) = R$$

या $$\frac{d^2v}{dx^2} + \left(P + \frac{2}{u}\frac{du}{dx}\right)\frac{dv}{dx} = \frac{R}{u} \qquad \ldots(4)$$

पुन: (4) में यदि $\frac{dv}{dx} = p$ तथा $\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{dp}{dx}$ रखें, तब

$$\frac{dp}{dx} + \left(P + \frac{2}{u}\frac{du}{dx}\right)p = \frac{R}{u} \qquad \ldots(5)$$

जो कि p में एक रैखिक समीकरण है । इसका

$$\text{समाकलन-गुणक (I.F.)} = \exp\left[\int\left(P + \frac{2}{u}\frac{du}{dx}\right)dx\right]$$

$$= \exp\left[\int P\,dx + \int\frac{2}{u}du\right]$$

$$= \exp\left[\int P\,dx + 2\log u\right] = u^2 e^{\int P\,dx}$$

$\therefore$ समीकरण (5) का हल होगा :

$$p.u^2 e^{\int P\,dx} = \int\left(\frac{R}{u}.u^2 e^{\int P\,dx}\right)dx + c_1$$

या $$p = \frac{1}{u^2}e^{-\int P\,dx}\int\left(Ru\,e^{\int P\,dx}\right)dx + \frac{c_1}{u^2}e^{-\int P\,dx} \qquad \ldots(6)$$

समीकरण (6) से हमें $p = \frac{dv}{dx}$ का मान प्राप्त होता है, जिसका समाकलन करने पर, हमें प्राप्त होता है कि

$$v = \int p\,dx + c_2 \qquad \ldots(7)$$

v के इस मान से हम सम्बन्ध $y = uv$ की सहायता से y का मान प्राप्त कर सकते हैं। y का यह मान समीकरण (1) का पूर्ण हल होगा, इस हल में दो स्वेच्छ अचर विद्यमान हैं।

कभी-कभी पूरक फलन निरीक्षण द्वारा सरलता से प्राप्त किया जा सकता है, इसके लिए निम्न नियमों का उपयोग किया जा सकता है।

§6·3 निरीक्षण द्वारा पूरक-फलन में विद्यमान एक समाकल ज्ञात करना (To find one integral belonging to the C.F. by Inspection)

माना कि दिया हुआ समीकरण है :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P\frac{dy}{dx} + Qy = 0 \qquad \ldots(1)$$

(i) माना कि $y = e^{mx}$, समीकरण (1) के पूरक-फलन का एक भाग है,

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = me^{mx},\ \frac{d^2y}{dx^2} = m^2e^{mx}$$

इन मानों को (1) में प्रतिस्थापन करने पर

$$(m^2 + Pm + Q)\,e^{mx} = 0 \Rightarrow m^2 + Pm + Q = 0 \qquad (\because e^{mx} \neq 0)$$

अतः e^{mx} पूरक-फलन का एक भाग है, यदि $\boldsymbol{m^2 + Pm + Q = 0}$

विशेषतः यदि $m = 1$ हो, तो e^x पूरक-फलन का एक भाग है, यदि

$$\boldsymbol{1 + P + Q = 0}$$ [Ajmer 09]

इसी प्रकार यदि $m = -1$ हो, तो e^{-x} पूरक-फलन का एक भाग है, यदि

$$\boldsymbol{1 - P + Q = 0}$$

(ii) माना कि $y = x^m$, समीकरण (1) के पूरक-फलन का एक भाग है,

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = mx^{m-1},\ \frac{d^2y}{dx^2} = m(m-1)\,x^{m-2}$$

इन मानों को (1) में प्रतिस्थापन करने पर

$$m(m-1)\,x^{m-2} + P.mx^{m-1} + Qx^m = 0$$

या $$\{m(m-1) + Pmx + Qx^2\}\,x^{m-2} = 0$$

या $$m(m-1) + Pmx + Qx^2 = 0 \qquad (\because x^{m-2} \neq 0)$$

अतः x^m पूरक-फलन का एक भाग है, यदि

$$\boldsymbol{m(m-1) + Pmx + Qx^2 = 0}$$ [Ajmer 12]

विशेषतः यदि $m = 1$ हो, तो $y = x$ पूरक-फलन का एक भाग है, यदि [Ajmer 10]

$$\boldsymbol{P + Qx = 0}$$

इसी प्रकार यदि $m = 2$ हो, तो $y = x^2$ पूरक-फलन का एक भाग है, यदि [Ajmer 11]

$$\boldsymbol{2 + 2Px + Qx^2 = 0}$$

जिसका एक हल) ... solution).

सामान्य रूप
(Normal Form)

§6·4 प्रथम अवकलज को हटाना या परतंत्र चर का परिवर्तन (सामान्य रूप में समानयन) [Removal of the first derivative or change of dependent Variable (Reduction to Normal Form)]

पूर्व के अनुच्छेदों में हमने देखा है कि समीकरण

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P\frac{dy}{dx} + Qy = R \qquad \ldots(1)$$

[Ajmer 2000, 02, 08; Udaipur 04, 06, 09; Kota 06; Bikaner 06, 08]

का पूर्ण हल तभी ज्ञात किया जा सकता है जबकि इसके पूरक-फलन का एक भाग ज्ञात हो । परन्तु हमेशा पूरक-फलन का एक भाग ज्ञात होना आसान नहीं होता । यहाँ हम एक ऐसी विधि बता रहे हैं जो कि पूरक-फलन के भाग पर निर्भर नहीं करती । इसके लिए परतंत्र चर का परिवर्तन करते हैं, जिससे परिवर्तित समीकरण में प्रथम अवकलज का पद शून्य हो जाए । माना कि व्यापक हल $y = vu$, जहाँ u इसके पूरक-फलन का एक भाग नहीं है ।

अब $\quad \frac{dy}{dx} = v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx}$ तथा $\frac{d^2y}{dx^2} = v\frac{d^2u}{dx^2} + 2\frac{du}{dx}\cdot\frac{dv}{dx} + u\frac{d^2v}{dx^2}$

इन मानों को समीकरण (1) में प्रतिस्थापित करने पर,

$$\left\{ v\frac{d^2u}{dx^2} + 2\frac{du}{dx}\cdot\frac{dv}{dx} + u\frac{d^2v}{dx^2} \right\} + P\left\{ v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx} \right\} + Q(uv) = R$$

$$\text{या } u\frac{d^2v}{dx^2} + u\frac{dv}{dx}\left\{ P + \frac{2}{u}\frac{du}{dx} \right\} + v\left\{ \frac{d^2u}{dx^2} + P\frac{du}{dx} + Qu \right\} = R \qquad \ldots(2)$$

यहाँ हम प्रथम अवकलज वाले पद $\frac{dv}{dx}$ का विलोपन करेंगे । ऐसा करने के लिए हम u का चयन इस प्रकार से करते हैं कि $P + \frac{2}{u}\frac{du}{dx}$ का मान शून्य हो जाए अर्थात्

$$P + \frac{2}{u}\frac{du}{dx} = 0 \quad \text{या} \quad \frac{du}{u} = -\frac{P}{2}dx$$

इसका समाकलन करने पर

$$\log u = -\int \frac{P}{2}dx$$

अत: $$u = \exp\left\{-\frac{1}{2}\int P\,dx\right\}$$

∴ समीकरण (2) से ....(3)

$$u\frac{d^2v}{dx^2} + v\left\{\frac{d^2u}{dx^2} + P\frac{du}{dx} + Q.u\right\} = R$$

या $$\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{v}{u}\left\{\frac{d^2u}{dx^2} + P\frac{du}{dx} + Q.u\right\} = \frac{R}{u} \quad ....(4)$$

अब (3) से, $\frac{du}{dx} = -\frac{P}{2}u$

तथा $$\frac{d^2u}{dx^2} = -\frac{1}{2}\left[P\frac{du}{dx} + u\frac{dP}{dx}\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\left[P\left(-\frac{P}{2}u\right) + u\frac{dP}{dx}\right]$$

$$= \frac{P^2}{4}u - \frac{u}{2}\frac{dP}{dx}$$

इन मानों को (4) में रखने पर,

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{v}{u}\left\{\frac{P^2}{4}.u - \frac{u}{2}\frac{dP}{dx} - \frac{P^2}{2}u + Q.u\right\} = \frac{R}{u}$$

या $$\frac{d^2v}{dx^2} + v\left\{\frac{P^2}{4} - \frac{P^2}{2} + Q - \frac{1}{2}\frac{dP}{dx}\right\} = R\exp\left\{\frac{1}{2}\int P\,dx\right\}$$

या $$\frac{d^2v}{dx^2} + v\left\{Q - \frac{1}{4}P^2 - \frac{1}{2}\frac{dP}{dx}\right\} = R\exp\left\{\frac{1}{2}\int P\,dx\right\}$$

∴ $$\mathbf{\frac{d^2v}{dx^2} + I.v = S} \quad ....(5)$$

जहाँ $\mathbf{I = Q - \frac{1}{4}P^2 - \frac{1}{2}\frac{dP}{dx}}$ तथा $\mathbf{S = R\exp\left\{\frac{1}{2}\int P\,dx\right\} = \frac{R}{u}}$ ....(6) **[Kota 13]**

समीकरण (5), समीकरण (1) का समान्य रूप (Normal Form) कहलाता है तथा इसका हल आसानी से ज्ञात किया जा सकता है, यदि I, या तो अचर हो या $1/x^2$ का समानुपाती हो।

टिप्पणी : विद्यार्थियों को सलाह दी जाती है कि I तथा S के मान स्मरण कर लें, जिससे कि (1) का परिवर्तित रूप (5) सीधा लिखा जा सके।

17. $x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 2kx\frac{dy}{dx} + (k$

18. $\left(\frac{d^2y}{dx^2} + y\right)\cot x + 2\left(\frac{dy}{dx} + y\tan x\right) = \sec x$

19. $x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 2x(3x-2)\frac{dy}{dx} + 3x(3x-4)\,y = e^{3x}$ **[Jodhpur 01, 07]**

20. $\frac{d^2y}{dx^2} + 2x\frac{dy}{dx} + (x^2+1)\,y = x(x^2+3)$

§6·5 स्वतंत्र चर का परिवर्तन (Change of the Independent Variable)

[Udaipur 07; Ajmer 03, 08]

उपरोक्त दोनों विधियों में हमने आश्रित चर y को v में बदला। कई बार रैखिक अवकल समीकरण का हल स्वतंत्र चर (independent variable) के परिवर्तन से संहत रूप (compact form) में ज्ञात किया जा सकता है।

मानलो द्वितीय कोटि का रैखिक समीकरण है :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P\frac{dy}{dx} + Qy = R \qquad \ldots\ldots(1)$$

जहाँ P, Q व R, x के फलन हैं। मानलो स्वतंत्र चर x को z में परिवर्तित किया, जहाँ z, x का एक उपयुक्त फलन (मालूम करना है) है, तब

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}$$

तथा
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}\right) = \frac{d}{dz}\left(\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}\right)\cdot\frac{dz}{dx}$$

$$= \frac{d^2y}{dz^2}\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \frac{dy}{dz}\cdot\frac{d^2z}{dx^2}$$

इन मानों को (1) में प्रतिस्थापित करने पर

$$\left\{\frac{d^2y}{dz^2}\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\frac{dy}{dz}\cdot\frac{d^2z}{dx^2}\right\}+P\left(\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}\right)+Q\cdot y=R$$

या $$\frac{d^2y}{dz^2}+\frac{\frac{d^2z}{dx^2}+P\frac{dz}{dx}}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\cdot\frac{dy}{dz}+\frac{Q}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\cdot y=\frac{R}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$$

या $$\frac{d^2y}{dz^2}+P_1\cdot\frac{dy}{dz}+Q_1\cdot y=R_1 \qquad .....(2)$$

जहाँ $$P_1=\frac{\frac{d^2z}{dx^2}+P\frac{dz}{dx}}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2},\ Q_1=\frac{Q}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\text{ तथ }R_1=\frac{R}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$$ **[Udaipur 12]**

यहाँ P_1, Q_1 तथा R_1, x के फलन हैं, परन्तु इनको z तथा x के मध्य दिए हुए सम्बन्ध की सहायता से z के पदों में व्यक्त किया जा सकता है ।

z का x के फलन के रूप में चयन (Choise of z as a function of x) :

z का x के फलन के रूप में चयन दो विभिन्न विधियों से कर सकते हैं, जिससे या तो $P_1=0$ या $Q_1=c^2$ परन्तु हम वही विधि प्रयोग में लेंगे जो दिए हुए समीकरण का संहत हल (compact solution) प्रदान करे ।

(a) यदि हम z का चयन इस प्रकार से करें कि (2) में $\frac{dy}{dz}$ का गुणांक शून्य हो जाए अर्थात् P_1 शून्य हो जाए अर्थात्

$$\frac{d^2z}{dx^2}+P\frac{dz}{dx}=0$$

या $$z=\int exp.\,(-\int P dx)\,dx \qquad .....(3)$$

तब समीकरण (2) निम्न रूप में परिवर्तित हो जाता है :

$$\frac{d^2y}{dz^2}+Q_1y=R_1 \qquad .....(4)$$

यह समीकरण समाकलनीय (Integrable) है, यदि Q_1 का मान अचर या $1/z^2$ के समानुपाती आ जाए ।

(b) यदि z का चयन इस प्रकार से करें कि (2) में Q_1 अचर (मानलो c^2) हो जाए अर्थात्

$$\frac{Q}{(dz/dx)^2}=c^2 \text{ या } c\frac{dz}{dx}=\sqrt{Q}$$

या $$cz=\int\sqrt{Q}\,dx \qquad .....(5)$$

तब समीकरण (2) निम्न रूप में परिवर्तित हो जाता है :

$$\frac{d^2y}{dz^2} + P_1 \frac{dy}{dz} + c^2 y = R_1 \qquad \ldots\ldots(6)$$

यह अवकल समाकलनीय (Integrable) है, यदि P_1 का मान अचर या शून्य आ जाए।

टिप्पणी 1. विद्यार्थियों को सलाह दी जाती है कि वे P_1, Q_1 तथा R_1 के मान याद कर लें जिससे कि (1) का परिवर्तित रूप (2) सीधा लिखा जा सके।

टिप्पणी 2. यदि $P_1 = 0$ से $Q_1 =$ अचर प्राप्त हो, तो (a) तथा (b) दोनों में से कोई एक विधि प्रयोग में ली जा सकती है।

टिप्पणी 3. कई बार दिए हुए समीकरण का हल ज्ञात करने के लिए z का चयन दोनों प्रकार से करना सम्भव होता है।