

Que

$$y'' + 3y' + 2y = e^{e^x}$$

$$\Rightarrow (D^2 + 3D + 2)y = e^{e^x}$$

$$\Rightarrow (m^2 + 3m + 2) \neq 0$$

$$\Rightarrow m^2 + 2m + m + 2 = 0$$

$$\Rightarrow m(m+2) + 1(m+2) = 0$$

$$\Rightarrow (m+1)(m+2) = 0$$

$$\Rightarrow m+1=0 ; m+2=0$$

$$m = -1, -2$$

$$C.O.F = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$$

Now

$$P.I. = \frac{e^{e^x}}{(D+2)(D+1)}$$

$$= \left(\frac{1}{D+1} - \frac{1}{D+2} \right) e^{e^x}$$

$$= \frac{e^{e^x}}{D+1} - \frac{e^{e^x}}{D+2}$$

$$= -x \int e^x \cdot e^{e^x} dx - e^{-2x} \int e^{2x} e^{e^x} dx$$

$$= e^{-x} \int e^x \cdot e^{e^x} dx - e^{-2x} \int e^x \cdot e^{e^x} dx$$

$$\text{Put } e^x = t \Rightarrow e^x dx = dt$$

$$\Rightarrow e^{-x} \int e^t dt - e^{-2x} \int t e^t dt$$

$$\Rightarrow e^{-x} e^t - e^{-2x} [(t-1)e^t]$$

$$\Rightarrow e^{-x} \cdot e e^x - e^{-2x} (e^x - 1) e e^x$$

$$\Rightarrow e^{-x} e e^x - (e^{-2x} e^x - e^{-2x}) e e^x$$

$$\Rightarrow e^{-x} e e^x - e^{-x} e e^x + e^{-2x} e e^x$$

$$\Rightarrow e^{-2x} e e^x$$
