उदाहरण 5. m के किस मान के लिए फलन (*For what value of m, the function*):

$$f(x) = \begin{cases} x^m \sin(1/x), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

मूल बिन्दु पर (*at origin*)

(a) $f(x)$ **संतत् है** [$f(x)$ *is continuous*],

(b) $f'(x)$ **संतत् है** [$f'(x)$ *is continuous*]

हल: (a) $x = 0$ **पर** $f(x)$ **की सांतत्यता** (*Continuity of* $f(x)$ *at* $x = 0$):

$$f(0) = 0 \quad \ldots(i)$$

$$f(0+0) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{h \to 0} f(0+h)$$

$$= \lim_{h \to 0} h^m \sin(1/h) \ (h > 0) \quad \ldots(ii)$$

$$f(0-0) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{h \to 0} f(0-h)$$

$$= \lim_{h \to 0} (-h)^m \sin\left(-\frac{1}{h}\right), \ (h > 0)$$

$$= \lim_{h \to 0} (-h)^{m+1} \sin\left(\frac{1}{h}\right) \quad \ldots(iii)$$

फलन $f(x)$, बिन्दु $x = 0$ पर संतत् होगा यदि सीमा (ii) तथा (iii) अलग-अलग शून्य हों। चूँकि $\sin(1/h)$, -1 तथा 1 के मध्य परिमित राशि है। अत: दोनों सीमाएँ शून्य होंगी, यदि $m > 0$ हो।

फलत: फलन $f(x)$ मूल बिन्दु पर संतत् होगा, यदि $m > 0$ हो।

(b) $x = 0$ पर $f'(x)$ की सांतत्यता देखने के लिए पहले हम $f(x)$ की $x = 0$ पर अवकलनीयता की जाँच करेंगे।

$x = 0$ पर $f(x)$ की अवकलनीयता [*Differentiability of $f(x)$ at $x = 0$*] :

$$f'(0+0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} h^{m-1} \sin\left(\frac{1}{h}\right), \ (h > 0) \qquad \ldots(iv)$$

$$f'(0-0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(0-h)-f(0)}{-h}$$

$$= \lim_{h\to 0} (-h)^{m-1} \sin(-1/h)$$

$$= \lim_{h\to 0} (-1)^m h^{m-1} \sin\left(\frac{1}{h}\right), \ (h > 0) \qquad \ldots(v)$$

फलन $f(x)$, $x = 0$ पर अवकलनीय होगा, यदि

$$f'(0+0) = f'(0-0)$$

यह तभी सम्भव है, जबकि $m - 1 > 0$, अर्थात् $m > 1$ हो।

अत: फलन $f(x)$, $x = 0$ पर अवकलनीय होगा यदि $m > 1$ हो।

$x = 0$ पर $f'(x)$ की सांतत्यता (*continuity of $f'(x)$ at $x = 0$*):

दिए हुए फलन का x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$f'(x) = mx^{m-1} \sin(1/x) - x^{m-2} \cos(1/x), \ x \neq 0$$

पुन: $f'(0) = 0$

स्पष्टत: $f'(x)$, $x = 0$ पर संतत् होगा, यदि $m > 2$ हो।

फलत: $f'(x)$ की मूल बिन्दु पर संतता का प्रतिबंध $m > 2$ होगा।

उदाहरण